Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Structure d'espace vectoriel

1°) Loi de composition externe

Déf : On appelle loi de composition externe (ou produit extérieur) opérant de $\mathbb{K}$ sur un ensemble E toute application : $\begin{cases}\mathbb{K}\times E\to E\\(\lambda,\vec{x})\mapsto\lambda.\vec{x}\end{cases}$.

Une loi de composition externe est usuellement notée.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Les éléments de E sont appelés vecteurs et sont souvent notés surmontés d'une flèche.

Déf : Soit E un ensemble muni d'un produit extérieur (.) de $\mathbb{K}$ sur E.

Une partie A de E est dite stable pour ce produit extérieur lorsque : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall\vec{x}\in A,\lambda.\vec{x}\in A$.

On peut alors considérer l'application restreinte $\begin{cases}\mathbb{K}\times A\to A\\(\lambda,\vec{x})\mapsto\lambda.\vec{x}\end{cases}$ qui définit un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur A appelé produit extérieur induit.

2°) Définition d'un espace vectoriel

Déf : Soit E un ensemble, $+$ une loi de composition interne sur E et . une loi de composition externe opérant de $\mathbb{K}$ sur E.

On dit que $(E,+,.)$, ou plus brièvement E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi :

(1) $(E,+)$ est un groupe abélien,

(2) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall\vec{u},\vec{v}\in E$ on a :

(a) $(\lambda+\mu).\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$,

(b) $\lambda.(\vec{u}+\vec{v})=\lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}$,

(c) $\lambda.(\mu.\vec{u})=(\lambda\mu).\vec{u}$,

(d) $1.\vec{u}=\vec{u}$.

L'élément neutre de $(E,+)$ est alors appelé vecteur nul, on le note $\vec{o}$.

3°) Exemples d'espaces vectoriels

a) structure sur $\mathbb{K}^n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $E=\mathbb{K}^n$.

Pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et on pose : $\lambda.\vec{x}=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$ et $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

On définit ainsi un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}^n$ et une loi de composition interne additive sur $\mathbb{K}^n$.

Prop : $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul $\vec{o}=(0,\dots,0)$.

b) structure sur $E_1\times\cdots\times E_n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $E=E_1\times\cdots\times E_n$.

Pour $\lambda\in\mathbb{K}$, $\vec{x}=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in\mathbb{K}^n$ et $\vec{y}=(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n)\in\mathbb{K}^n$ on pose :

$\lambda.\vec{x}=(\lambda\vec{x}_1,\dots,\lambda\vec{x}_n)$ et $\vec{x}+\vec{y}=(\vec{x}_1+\vec{y}_1,\dots,\vec{x}_n+\vec{y}_n)$.

Prop : $(E_1\times\cdots\times E_n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul $\vec{o}=(\vec{o}_{E_1},\dots,\vec{o}_{E_n})$.

c) structure sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$

Soit X un ensemble et $E=\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$.

Pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $f,g:X\to\mathbb{K}$, on définit $\lambda.f:X\to\mathbb{K}$ et $f+g:X\to\mathbb{K}$ par :

$\forall x\in X,(\lambda.f)(x)=\lambda f(x)$ et $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

On définit ainsi un produit extérieur de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ et une loi de composition interne additive sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$.

Prop : Soit X un ensemble. $(\mathcal{F}(X,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.

En particulier :

Pour $X=\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{C})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Pour $X=\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

d) structure sur $\mathcal{F}(X,F)$

Soit X un ensemble et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $f,g\in\mathcal{F}(X,F)$ on définit $\lambda.f:X\to F$ et $f+g:X\to F$ par : $\forall x\in X,(\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$ et $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Prop : $(\mathcal{F}(X,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul égal à la fonction constante égale à $\vec{o}_F$.

e) les espaces complexes sont aussi réels

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La loi de composition externe de opérant de $\mathbb{C}$ sur E définit aussi par restriction une loi de composition externe opérant de $\mathbb{R}$ sur E. Les propriétés calculatoires étant conservées, on peut affirmer que E est alors aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4°) Calculs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Prop : $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.\vec{u}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right).\vec{u}$ et $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda.\vec{u}_i\right)=\lambda.\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{u}_i\right)$.

Prop : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall\vec{u}\in E$ on a :

$0.\vec{u}=\vec{o}$ et $\lambda.\vec{o}=\vec{o}$

$\lambda.\vec{u}=\vec{o}\Rightarrow\lambda=0$ ou $\vec{u}=\vec{o}$.

Prop : $\forall\vec{u}\in E,(-1).\vec{u}=-\vec{u}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\vec{u}+\cdots+\vec{u}=n.\vec{u}$.

5°) Combinaison linéaire

Déf : Soit $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ des vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire (CL) des vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ tout vecteur $\vec{x}$ de E pouvant s'écrire sous la forme $\vec{x}=\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_n\vec{e}_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i$ avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$.

II. Sous espace vectoriel

$(E,+,.)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Définition

Déf : On appelle sous-espace vectoriel de E toute partie F de E telle que :

1) $F\neq\varnothing$,

2) $\forall\vec{x},\vec{y}\in F,\vec{x}+\vec{y}\in F$ (F est stable pour $+$),

3) $\forall\vec{x}\in F,\forall\lambda\in\mathbb{K},\lambda.\vec{x}\in F$ (F est stable pour.).

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ alors $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Prop : (Caractérisation usuelle)

Soit $F\subset E$. F est un sous-espace vectoriel ssi :

1) $\vec{o}\in F$,

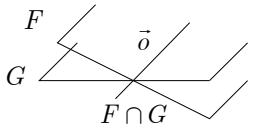
2) $\forall\vec{x},\vec{y}\in F,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\lambda.\vec{x}+\mu.\vec{y}\in F$

(F stable par combinaison linéaire).

2°) Opérations sur les sous-espaces vectoriels

a) intersection

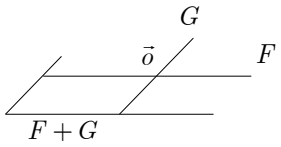
Prop : Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.



Prop : Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) somme de sous-espaces vectoriels

Déf : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et G l'ensemble
$F+G=\{\vec{u}+\vec{v}\,/\,\vec{u}\in F,\vec{v}\in G\}$.

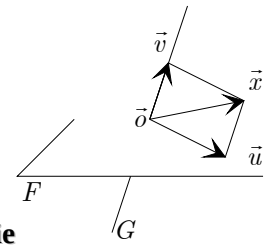


Prop : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus $F+G$ contient F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G.

3°) Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Déf : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires ssi $F\cap G=\{\vec{o}\}$ et $F+G=E$.

Théorème :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x}\in E, \exists!(\vec{u},\vec{v})\in F\times G, \vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$.



4°) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Prop : Soit A une partie de E.
Il existe un unique sous-espace vectoriel de E, noté $\text{Vect}(A)$, tel que :
1) $A\subset \text{Vect}(A)$,
2) $\text{Vect}(A)$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.
$\text{Vect}(A)$ se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A.

Prop : Soit A et B deux parties de E.
Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $\text{Vect}(A)=A$,
$\text{Vect}(\text{Vect}(A))=\text{Vect}(A)$,
$A\subset B \Rightarrow \text{Vect}(A)\subset \text{Vect}(B)$,
$\text{Vect}(A\cup B)=\text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$.

En particulier :
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. $\text{Vect}(F\cup G)=F+G$.
Ainsi $F+G$ apparaît comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

III. Applications linéaires

E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1°) Définition

Déf : Soit $f:E\to F$. On dit que f est une application ($\mathbb{K}$-) linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel) ssi :
1) $\forall \vec{x},\vec{y}\in E, f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$,
2) $\forall \lambda\in\mathbb{K}, \forall \vec{x}\in E, f(\lambda.\vec{x})=\lambda.f(\vec{x})$.
On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ (ou $\mathcal{L}(E,F)$) l'ensemble de ces applications.

Prop : (caractérisation usuelle)

Soit $f : E \to F$. On a équivalence entre :

(i) f est une application linéaire,

(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, f(\lambda.\vec{x} + \mu.\vec{y}) = \lambda.f(\vec{x}) + \mu.f(\vec{y})$.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a : $f(\vec{o}_E) = \vec{o}_F$.

Prop : Si $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ est une famille de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{e}_n)$

(l'image d'un combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. On a $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

2°) Application linéaires particulières

a) formes linéaires

Déf : On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

On note E^*, au lieu de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, l'ensemble des formes linéaires sur E.

E^* est appelé dual de E.

b) endomorphisme

Déf : On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble de ces applications.

Prop : Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

c) isomorphisme

Déf : On appelle isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel toute application linéaire bijective.

Prop : Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors $g \circ f : E \to F$ est un isomorphisme.

Prop : Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.

Déf : Deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels sont dits isomorphes ssi il existe un isomorphisme entre ceux-ci.

d) automorphisme

Déf : On appelle automorphisme de E, tout endomorphisme de E bijectif.

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Prop : $\forall f, g \in GL(E), f \circ g \in GL(E)$ et $\forall f \in GL(E), f^{-1} \in GL(E)$.

Déf : $(GL(E), \circ)$ est appelé groupe linéaire de E.

3°) Noyau et image d'une application linéaire

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si V est une sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

On appelle image de f l'ensemble $\operatorname{Im} f = f(E)$.

On appelle noyau de f l'ensemble $\ker f = f^{-1}(\{\vec{o}_F\})$.

Prop : $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

+ f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$,

+ f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{o}_E\}$.

4°) L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème :

$(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En particulier :

$(\mathcal{L}(E),+,.)$ et $(E^*,+.)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Prop : (linéarité du produit de composition)

$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall f,g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall h \in \mathcal{L}(F,G)$,

on a $h \circ (\lambda.f + \mu.g) = \lambda.(h \circ f) + \mu.(h \circ g)$.

$\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall h \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall f,g \in \mathcal{L}(F,G)$,

on $(\lambda.f + \mu.g) \circ h = \lambda.(f \circ h) + \mu.(g \circ h)$.

5°) L'anneau des endomorphismes

Théorème :

$(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, généralement non commutatif, d'élément nul l'endomorphisme nul (noté 0 ou $\tilde{0}$) et d'élément unité l'endomorphisme identité (noté I ou Id).

Déf : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$f^0 = I$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$,..., $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n termes).

Prop : Soit $f,g \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si f et g commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$) alors $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$,

$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$ et $f^n - g^n = (f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}$.

En particulier :

Puisque f et I commutent :

$(I+f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$ et $f^n - I = (f-I)\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

Prop : $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \text{Im}\, g \subset \ker f$.

Déf : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit idempotent ssi $f^2 = f$.

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}, f^n = 0$.

IV. Transformations vectorielles

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Homothétie vectorielle

Déf : On appelle homothétie (vectorielle) de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda : \begin{cases} E \to E \\ \vec{x} \mapsto \lambda.\vec{x} \end{cases}$.

En particulier :

Si $\lambda = 1$ alors $h = I$, si $\lambda = 0$ alors $h = \tilde{0}$.

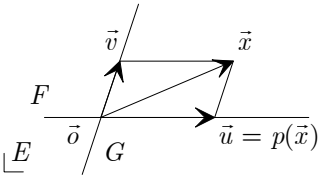
Prop : $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et h_λ commute avec tout endomorphisme de E.

Prop : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda \in GL(E)$ et $(h_\lambda)^{-1} = h_{1/\lambda}$.

2°) Projection vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u},\vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$. Posons $p(\vec{x}) = \vec{u}$.
On définit ainsi $p : E \to E$.

Déf : p est appelée projection (vectorielle) sur F parallèlement à G.



En particulier :

$F = E$ et $G = \{\vec{o}\}$ donnent $p = I$.

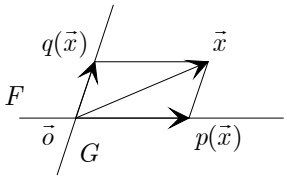
$F = \{\vec{o}\}$ et $G = E$ donnent $p = \tilde{0}$.

Prop : p est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$.
De plus $\text{Im}\, p = \ker(p - I) = F$ et $\ker p = G$.

Déf : La projection vectorielle θ sur G et parallèlement à F est appelée projection complémentaire de p.

Prop : $q = \text{Id} - p$.

Déf : On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.



Théorème :

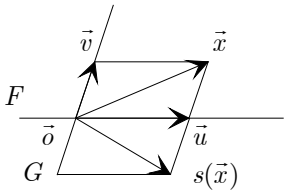
Si p est un projecteur de E alors :

1) $\text{Im}\, p$ et $\ker p$ sont supplémentaires,

2) p est la projection vectorielle sur $F = \text{Im}\, p$, parallèlement à $G = \ker p$.

3°) Symétrie vectorielle

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$. Posons $s(\vec{x}) = \vec{u} - \vec{v}$.
On définit ainsi $s : E \to E$.



Déf : s est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

En particulier :

$F = E$ et $G = \{\vec{o}\}$ donnent $s = I$.

$F = \{\vec{o}\}$ et $G = E$ donnent $s = -I$.

Prop : s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = I$.
De plus $F = \ker(s - I)$ et $G = \ker(s + I)$.

Déf : La symétrie s' par rapport à G et parallèlement à F est appelée symétrie complémentaire de s.

Prop : $s' = -s$.

Théorème :

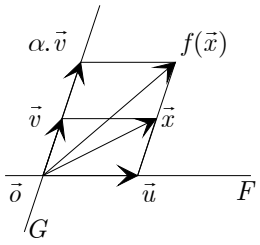
Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = I$ alors :

1) $\ker(s - I)$ et $\ker(s + I)$ sont supplémentaires dans E,

2) s est la symétrie vectorielle par rapport à $F = \ker(s - I)$, parallèlement à $G = \ker(s + I)$.

4°) Affinités vectorielles

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires et $\alpha \in \mathbb{K}$.
$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$. Posons $f(\vec{x}) = \vec{u} + \alpha.\vec{v}$.
On définit ainsi $f : E \to E$.



Déf : f est appelée affinité (vectorielle) par rapport F parallèlement à G et de rapport α.

En particulier :

Si $\alpha = 1$ alors $f = I$.

Si $\alpha = 0$ alors $f = p$.

Si $\alpha = -1$ alors $f = -s$.

Prop : f est un endomorphisme de E.

V. Notions affines

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Translation

Déf : Soit $\vec{u} \in E$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application $t_{\vec{u}} : E \to E$ définie par $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{u}$.

Prop : Soit $\vec{u},\vec{v} \in E$. $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}$ est une permutation de E et $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.

2°) Sous-espace affine

Déf : Soit $\vec{a} \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle sous-espace affine passant par $\vec{a}$ et dirigé par F l'ensemble : $\vec{a}+F = \{\vec{a}+\vec{u} / \vec{u} \in F\} = \{\vec{x} \in E / \vec{x}-\vec{a} \in F\}$.

Prop : Soit $V = \vec{a}+F$ un sous-espace affine.

Pour tout $\vec{b} \in V$ on a $V = \vec{b}+F$.

Prop : Si $V = \vec{a}+F$ alors $F = \{\vec{x}-\vec{y} / \vec{x},\vec{y} \in V\}$.

Par suite il y a unicité du sous-espace vectoriel F .

Déf : Le sous-espace vectoriel F est appelé direction sur du sous-espace affine V .

3°) Incidence de sous-espaces affines

Prop : Si V et W sont deux sous-espaces affines de directions F et G alors $V \cap W$ est soit vide soit égal à un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Déf : Soit V et W deux sous-espaces affines de directions F et G .
On dit que V est parallèle à W ssi $F \subset G$

Prop : Soit V et W deux sous-espaces affines de direction F et G .
Si V est parallèle à W alors $V \cap W = \varnothing$ ou $V \subset W$.

4°) Equations linéaires

Déf : On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(\vec{x}) = \vec{y}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$ où $\vec{y} \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

On appelle équation homogène associée l'équation $f(\vec{x}) = \vec{o}$.

Théorème :

L'ensemble solution de l'équation linéaire $f(\vec{x}) = \vec{y}$ est soit vide, soit égal à un sous-espace affine de direction $\ker f$.

5°) Barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n \in E$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n \neq 0$.

Déf : On appelle barycentre des vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ affectés respectivement des masses $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ le vecteur : $\vec{v} = \dfrac{\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_n\vec{u}_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$.

Déf : Lorsque les $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont égaux non nuls, alors $\vec{v} = \dfrac{1}{n}(\vec{u}_1+\cdots+\vec{u}_n)$ est appelé isobarycentre des vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$.

Quand $n = 2$, on parle de milieu de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Prop : Si tous les $\vec{u}_i$ appartiennent à un même sous-espace affine $V = \vec{a}+F$ alors le barycentre $\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ affectés des masses $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ appartient à V .

6°) Convexité

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Déf : Soit $\vec{a},\vec{b} \in E$. On appelle segment d'extrémités $\vec{a}$ et $\vec{b}$ l'ensemble : $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left\{(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b} / \lambda \in [0,1]\right\}$

Déf : Soit C une partie de E .
On dit que C est convexe ssi $\forall \vec{a},\vec{b} \in C, \left[\vec{a},\vec{b}\right] \subset C$.

Prop : Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$.
$C = \bigcap_{i\in I} C_i$ est un convexe.